Formule de Stirling (223, 224, 236)

Gourdon Analyse p. 130 et 219

prop : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$

démo :

* Étape 1 : Intégralles de Wallis.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx$. On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$

Soit $n \geq 2$, en intégrant par parties, on a :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\sin^{n-1}(x)\,dx$$

$$= \left[-\cos(x)\sin^{n-1}(x)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x)(n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)(n-1)\sin^{n-2}(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(x))(n-1)\sin^{n-2}(x)\,dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Donc $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

$\forall p \in \mathbb{N}^*$,
$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3) \text{---} 1}{2p\,(2p-2) \text{---} 2}\underbrace{I_0}_{=\pi/2}$$

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p\,(2p-2) \text{---} 1}{(2p+1)(2p-1) \text{---} 3} \times \underbrace{I_1}_{=1}$$

De plus, on remarque que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin^{2p+1}(x) \leq \sin^{2p}(x) \leq \sin^{2p-1}(x)$

D'où par intégration, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$. Donc $1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}$

Par le thm des gendarmes, on obtient : $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$.

Donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{1}{2p+1}\left[\frac{2p\,(2p-2) \text{---} 2}{(2p-1)(2p-3) \text{---} 3}\right]^2 \cdot \frac{2}{\pi} = 1 = \lim\limits_{p\to+\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$

$\downarrow \frac{2}{2p+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{2p} = \frac{1}{p}$

D'où $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\left[\frac{2p\,(2p-2) \text{---} 2}{(2p-1)(2p-3) \text{---} 3}\right]^2 = \pi$ (Formule de Wallis)

* Étape 2 : Formule de Stirling

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad u_n = \dfrac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$ et $v_n = \log\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

On a $v_n = \log\left(\dfrac{(n+1)^{\cancel{n+1}}}{n^n} \dfrac{e^{-(\cancel{n}+1)}}{e^{-\cancel{n}}} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cancel{\dfrac{n!}{(n+1)!}}\right) = \log\left(\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{1}{e}\right)$

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
$\ln(a^b) = b\ln(a)$

$= -1 + \left(n + \dfrac{1}{2}\right) \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{\uparrow}{=} -1 + \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$

$= -1 + 1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

On a donc $|v_n| = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum |v_n|$ converge.

Donc $\sum v_n$ converge.

Or $v_1 + \ldots + v_N = \log(u_{N+1}) - \log(u_1)$ donc $(\log(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Notons λ sa limite. On a alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{k}$ $\cancel{:= e^\lambda}$ $\quad e^\lambda := \dfrac{1}{k} \iff$ $u_n \cdot k \sim 1$, $u_n = \dfrac{u_n}{\frac{1}{k}}$

$\dfrac{n^n e^{-n} \sqrt{n} \cdot k}{n!} \sim 1$

D'où $\quad n! \sim k \sqrt{n}\, n^n e^{-n}$.

Déterminons la constante k, à l'aide de la formule de Wallis.

$$\frac{1}{p}\left[\frac{\overset{2^{2p}(p!)^2}{\overset{\shortparallel}{2p(2p-2) \ldots 2}}}{(2p-1)(2p-3)\ldots 3}\right]^2 = \frac{1}{p}\left[\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right]^2 \sim \frac{1}{p} 2^{4p} \left[\frac{(k\sqrt{p}\, p^p e^{-p})^2}{k\sqrt{2p}\,(2p)^{2p} e^{-2p}}\right]^2$$

$\times (2p)(2p-2) \ldots 2 \ = (2p)!$

$$= \frac{k^2}{\cancel{p}} \frac{\cancel{2^{4p}}\, \cancel{p}^2\, \cancel{p^{4p}}\, \cancel{e^{-4p}}}{2\cancel{p}\, (\cancel{2p})^{4p}\, \cancel{e^{-4p}}} = \frac{k^2}{2}$$

Donc par la formule de Wallis, on a $\pi = \dfrac{k^2}{2}$

D'où $\quad k = \sqrt{2\pi}$

Finalement, le résultat obtenu est $\quad n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

Questions : Formule de Stirling

- $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin^{2p+1}(x) \leq \sin^{2p}(x) \leq \sin^{2p-1}(x)$?

Sur $[0, 2\pi]$, la fonction sinus est dans $[0,1]$ et est croissante.